.

TD1
Probabilité, indépendance, conditionnement

Exercice 1

On considère deux portées de lapereaux : la première portée est de 5 lapereaux et la deuxième de 6 lapereaux. On regroupe tous les lapereaux et on suppose que chacun a la même probabilité d'être choisi. On prélève simultanément 4 lapereaux. Calculer les probabilités d'obtenir :

1. exactement trois lapereaux de la première portée
2. au moins un lapereau de la deuxième portée

Exercice 2

Un allèle A est présent dans une population en proportion p, de sorte que l'on peut considérer qu'un père transmet cet allèle à chaque enfant avec probabilité p. De même une mère transmet A avec probabilité p et on suppose qu'il y a indépendance entre ce que transmet le père et ce que transmet la mère. On suppose que chaque parent a un allèle A.

1. Quelle probabilité a l'enfant :
   (a) de porter A en double exemplaire (homozygotie A) ?
   (b) de porter A en un seul exemplaire ?
   (c) de ne pas porter A ?

   Vérifier que la somme de ces trois probabilités vaut 1.
2. L'enfant a à son tour un descendant. Montrer que le modèle reste cohérent, c'est-à-dire que la probabilité pour qu'il transmette l'allèle A vaut p.

Exercice 3

Un examen systématique de dépistage est institué pour détecter une maladie M. On sait que le risque d'avoir cette maladie est de 0.001. L'examen donne des faux positifs avec probabilité 0.1 et des faux négatifs avec une probabilité de 0.3. Un individu subit un examen qui se révèle positif. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

Exercice 4

Les cultures de tissus végétaux peuvent être infectées soit par des champignons, soit par des bactéries. La probabilité d'infection par champignons est de $0,15$. La probabilité d'infection par bactéries est de $0,08$.

1. Quelle est la probabilité d'une infection simultanée par champignons et bactéries :
   (a) dans le cas où les infections sont indépendantes ;
   (b) dans le cas où (les infections n'étant pas indépendantes) la probabilité d'infection par bactéries sachant qu'on a une infection par champignons est égale à $0,04$.
2. Calculer la probabilité d'infection, quelle qu'en soit l'origine (dans le cas où les infections sont indépendantes uniquement).

Exercice 5

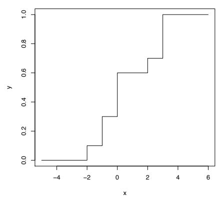
Dans une mare cohabitent trois types de tritons. Le type A représente 60% de la population, le type B représente 30% et le type C représente 10%. Une mouette cherche à attraper un triton sans distinguer de quel type il est. Mais on sait qu'un triton A échappe à l'attaque avec probabilité 50%, un triton B échappe avec probabilité 20% et un triton C avec probabilité 5%. Quel est en pourcentage la composition en triton du repas de cette mouette ?

Université d'Evry Val d'Essonne **Année universitaire 2015-2016**
L1 SDV - MSV20

TD2
Variables aléatoires réelles

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire discrète dont la fonction de répartition est donnée par la figure suivante :



1. Lire sur la figure les valeurs de $\mathbb{P}(X > 0)$, $\mathbb{P}(-2 < X \leq 1)$.
2. Donner la loi de X. Tracer le diagramme en bâtons représentant cette loi.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2

Le temps T nécessaire à un rat pour parcourir un labyrinthe est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par :

t (en secondes)	2	3	4	5	6	7
$P(T = t)$	$0,1$	$0,1$	$0,3$	p_5	$0,2$	$0,1$

1. Compléter le tableau en calculant $p_5 = P(T = 5)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de T.

Le rat est récompensé à l'aide d'un biscuit pour chaque seconde économisée sur un temps de parcours de 6 secondes (c'est à dire que s'il met 6 secondes ou plus, il ne reçoit rien, s'il met 5 secondes, il reçoit 1 biscuit, s'il met 4 secondes, il reçoit 2 biscuits, etc).

3. Donner la loi de probabilité de la variable récompense R égale au nombre de biscuits reçus.
4. Calculer l'espérance de R.
5. Supposons que le rat soit puni par un choc électrique dont la puissance augmente fortement avec le temps mis à parcourir le labyrinthe, soit un choc de T^2 volts pour un temps de T secondes. Calculer la punition moyenne du rat.
6. Reprendre la question précédente en supposant que la punition est un choc électrique dont la puissance varie avec le temps selon la formule P = 10 T+5 (la puissance du choc électrique est exprimée en volts). Calculer de deux façons différentes la punition moyenne ainsi que Var (P).

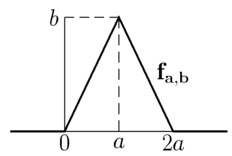
Exercice 3

Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |t| > 2 \\ \frac{1}{C}(4 - t^2) & \text{si} \quad -2 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

1. Quelle valeur faut-il donner à C pour que f soit bien une densité ?
2. Tracer cette densité.
3. Déterminer $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$, $\mathbb{P}(|X| > \frac{3}{2})$.
4. Déterminer et tracer la fonction de répartition de X.
5. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 4



1. Déterminer b en fonction de a par un raisonnement géométrique de sorte que $f_{a,b}$ soit une densité. On fixe désormais b ainsi.
2. Déterminer une écriture analytique de f_a.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ si X a pour densité f_a.
4. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} a(4 - x) & \text{si } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer a pour que f soit bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
3. Calculer les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X \geq 2)$; $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 3)$.
4. Calculer, si elles existent, l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Université d'Evry Val d'Essonne **Année universitaire 2015-2016**
L1 SDV - MSV20

TD3
Lois usuelles

Exercice 1

Dans une collection de roches, 40% sont de type basalte et 60% sont de type granite. Cinq roches sont choisies au hasard à des fins d'analyses chimiques. On note X le nombre de roches de type basalte dans l'échantillon.

1. Préciser la loi de probabilité de X et ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne seulement des roches de même type.

Exercice 2

Dans un centre de transfusion sanguine, on estime qu'une poche sur cent doit être retirée en raison de la présence d'anticorps indiquant différentes infections. Les poches sont regroupées par lot de vingt.

1. Quelle est la loi exacte du nombre de poches infectées par lot ? Indiquer son espérance et son écart-type.
2. Une recherche d'anticorps pour une poche a un coût C. Pour un nombre total de N poches, quel est le coût total de la recherche d'anticorps si elle est faite poche par poche ?
3. On considère plutôt la procédure suivante : on mélange un peu de sang de chacune des vingt poches d'un lot et on recherche les anticorps dans ce mélange. Si le test est positif, on reteste une à une chacune des poches du lot. Quelle est la probabilité que la recherche soit négative sur le mélange des poches ?
4. On considère à nouveau un total de N poches (on supposera que N est un multiple de 20). Quelle est le loi du nombre de lots qu'il faudra tester en intégralité ? Quelle est l'espérance du coût du dépistage sur les N poches avec cette procédure ? Cette procédure est-elle rentable ?

Exercice 3

On admet que la probabilité d'apparition d'une maladie M chez un individu est de 2%. Combien de personnes faut-il examiner pour que la probabilité de trouver au moins un malade soit supérieure à 95% ?

Exercice 4

On sait que $0,2\%$ de la population présente une allergie à une vaccination V.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le nombre de personnes allergiques sur 1000 personnes vaccinées.
2. Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
3. Quelle est la probabilité pour que sur ces 1000 personnes vaccinées, on constate plus de quatre allergies ?

Exercice 5

On sait que le nombre de particules émises à partir d'une source radioactive suit une loi de Poisson avec une émission moyenne de deux particules par seconde.

1. Déterminer la probabilité qu'au moins une particule soit émise en trois secondes.
2. Quel serait le taux d'émission par seconde pour que la probabilité d'obtenir au moins une émission en trois secondes soit égale à 0.90 ?

Exercice 6

On enferme des rats dans une cage qu'ils peuvent ouvrir grâce à un mécanisme. Sous l'hypothèse que les rats ne tirent pas profit de leurs échecs successifs, chaque essai a une même probabilité p de réussir. Déterminer la loi de la variable aléatoire X donnant le nombre d'essais pour que le rat se libère.

Exercice 7

On suppose que le génome humain est constitué de $3,2$ milliards de nucléotides. 1% des bases se trouvent dans des paires CpG, qui mutent plus facilement, avec un taux de mutation par génération de 8.10^{-8}. Le taux de mutations par génération hors dinucléotides CpG est $1,6.10^{-9}$.

1. Quelle est la loi exacte du nombre de mutations par génération hors dinucléotides CpG. Par quelle loi peut-on raisonnablement l'approcher ?
2. Même question pour les mutations concernant les dinucléotides CpG.
3. Quelle est la loi du nombre de mutations par génération ?

Exercice 8

On suppose que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.5 et que les naissances sont indépendantes. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de garçons dans une famille de 6 enfants.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Dessiner le diagramme en bâton de la distribution de X.
2. Calculer la probabilité pour qu'il y ait dans cette famille au moins un garçon.
3. Calculer l'espérance μ et la variance σ^2 de X. Qu'elle est la proportion des familles dont le nombre de garçons est à l'extérieur de l'intervalle $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$.

Université d'Evry Val d'Essonne **Année universitaire 2015-2016**
L1 SDV - MSV20

TD4
Lois usuelles (suite)

Exercice 1

On considère une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Rappeler la fonction de répartition de la variable aléatoire U.
2. On pose $V = -\ln U$. Déterminer la fonction de répartition de V.
3. Quelle est la loi de V ?

Exercice 2

On s'intéresse à le durée de vie T d'une cellule à l'état sain, c'est-à-dire avant qu'apparaisse une mutation la tuant ou la transformant en cellule cancéreuse. On définit la fonction de survie comme la fonction S donnée par

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t)$$

1. Au vu de ce que représente la variable aléatoire T, quelle loi de probabilité peut-on dans un premier temps envisager pour T ?
2. Que vaut la fonction de survie dans ce cas ?
3. Montrer que pour tout réel $\epsilon > 0$, $\mathbb{P}(T > t + \epsilon | T > t) = \mathbb{P}(T > \epsilon)$. Commenter.
4. Un organe est composé de N cellules. On note $T_1, \dots, T_N$ les variables aléatoires représentant les temps de vie des cellules jusqu'à l'apparition d'une mutation. On suppose que ces N variables sont indépendantes et sont toutes distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ. On suppose que la première mutation d'une des cellules suffit pour déclencher une tumeur. On note X la durée de vie de l'organe. Déterminer la fonction de survie $S_X(t)$ de l'organe.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution normale centrée réduite : $X \sim N(0,1)$.

1. Déterminer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X < 0.93) \quad \mathbb{P}(X < -0.74) \quad \mathbb{P}(-1.4 < X < 0.2)$$

2. Déterminer d et e tels que :

$$\mathbb{P}(X < d) = 0.25 \quad \mathbb{P}(|X| < e) = 0.65$$

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance 4 et de variance 4. Déterminer les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X > 6) \quad \mathbb{P}(|X| > 6) \quad \mathbb{P}(1.7 \leq X \leq 2.82)$$

Exercice 5

Soit Y une variable aléatoire telle que $Y \sim N(4, 16)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(Y > 0)$.
2. Déterminer h tel que $\mathbb{P}(0 < Y < h) = 0.5$.

Exercice 6

Soir X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2. Déterminer μ et σ^2 tels que $\mathbb{P}(X > 4) = 0.8413$ et $\mathbb{P}(X > 16) = 0.0228$.

Exercice 7

Dans une certaine population, un test biologique X suit une loi normale d'espérance $\mu = 150$ et de variance $\sigma^2 = 2500$.

1. Quelle est la valeur u telle que la probabilité d'avoir un résultat supérieur à u soit de 5% ?
2. L'intervalle des résultats considérés comme normaux est $[52, 232]$. Quelle est la probabilité qu'un individu ait un résultat normal ?

Exercice 8

Le taux de cholestérol d'un individu d'une population $\mathcal{P}$ suit une distribution normale telle que la probabilité d'avoir un taux inférieur à 165 cg/l est 0.56 et la probabilité d'avoir un taux supérieur à 180 cg/l est 0.1. Déterminer l'espérance et la variance du taux de cholestérol dans cette population.

Exercice 9

Certains diabètes de type II se caractérisent par un taux élevé de glycémie et un taux trop bas de magnésium. On considère que des patients sains ont une glycémie qui suit une loi normale d'espérance 5 mmol/L et d'écart-type 1 mmol/L et un taux de magnésium qui suit une loi normale d'éspérance 50 mg/L et d'écart-type 5 mg/L. On cherche à mettre en place un test médical permettant de détecter les personnes souffrant de ce type de diabète. On suppose que la glycémie chez les patients malades suit une loi normale d'espérance 8 mmol/L et d'écart-type 1 mmol/L. On suppose de plus que cette maladie touche 5% de la population.

1. Quel est le seuil S tel que 10% des patients sains ont une glycémie supérieure à S ? Quelle est la probabilité qu'une personne malade ait une glycémie supérieure à S ?
2. Un patient sain n'étant pas à jeun augmente artificiellement sa glycémie. Cette augmentation suit une loi normale d'espérance 1.5 mmol/L et d'écart-type 0.5 mmol/L. Cette augmentation est supposée indépendante de la glycémie à jeun. Quelle est la loi de la glycémie pour un patient sain non à jeun ? Quelle est alors sa probabilité d'avoir un taux supérieur à S ?
3. La première prise de sang d'un patient à jeun a donné une glycémie supérieure à S. Sachant cela, quelle est la probabilité que le patient soit malade ? sain ? Son médecin décide alors d'effectuer une deuxième prise de sang. Quelle est la probabilité que la glycémie soit à nouveau supérieure à S ?
4. On décide de déclarer malade une personne ayant une glycémie supérieure à S et un taux de magnésium inférieur à 42 mg/L. Quelle est la probabilité pour une personne saine d'être déclarée malade si on suppose la glycémie et le taux de magnésium indépendants ?

Université d'Evry Val d'Essonne **Année universitaire 2015-2016**
L1 SDV - MSV20

TD5
Lois usuelles (suite)

Exercice 1

On lance un dé 80 fois. Quelle est la probabilité que la somme totale des nombres obtenus dépasse 301 ?

Indication : On rappelle que si X est une variable aléatoire suivant une distribution uniforme discrète sur l'ensemble $\{1, 2, ..., k\}$, alors $E(X) = \frac{k+1}{2}$ et $V(X) = \frac{k^2-1}{12}$.

Exercice 2

On note p la probabilité d'observer un phénotype donné sur un individu issu d'un certain croisement. Sous l'hypothèse $p = 9/16$, calculer la probabilité d'observer moins de 220 individus (220 inclu) possédant le phénotype sur un échantillon de 384 descendants.

Exercice 3

On suppose que la glycémie est distribuée normalement dans la population, avec une moyenne de 1 g/l et un écart-type de 0,03 g/l. On mesure la glycémie chez un individu.

1. Calculer la probabilité pour que sa glycémie soit :
   (a) inférieure à 1,06
   (b) supérieure à 0,9985
   (c) comprise entre 0,94 et 1,08
2. On mesure la glycémie chez 1 000 individus. Donner l'espérance du nombre d'individus dont la glycémie est supérieure à 0,99.
3. Quelle est la probabilité d'observer moins de 200 individus (sur 1 000) avec une glycémie supérieure à 0.99 ?