Feuille TD 3

L2 math
2017-18.

ex 1

p proba d'avoir de l'asthme en Ile de France

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{si pers. } i \text{ a de l'asthme} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$Z_i \sim \mathcal{B}(p)$.

$Z_1 \dots Z_n$ $\perp\!\!\!\perp$ $n = 550$.

1) LGN.

Soit $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

* $\forall \varepsilon > 0$, $P(|\bar{Z}_n - p| > \varepsilon) \xrightarrow{0}$ qd $n \to \infty$
* $E[(\bar{Z}_n - p)^2] \xrightarrow{0}$ qd $n \to \infty$

car $E(Z_i) = p$.

2) $\hat{p}_n = \bar{Z}_n$

3) $E[(\bar{Z}_n - p)^2] = V(\bar{Z}_n)$ car $E(\bar{Z}_n) = p$.

$$= \frac{V(Z_i)}{n}$$

$$= \frac{p(1-p)}{n}$$

$E(\bar{Z}_n) = p$ donc $\underset{\hat{p}_n}{\overset{\|}{\bar{Z}_n}}$ estimateur sans biais de p.

Ex 6 X_i nb d'appels à un central téléphonique le jour i

$X_1 \dots X_n$ iid de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

$n = 100$ $\bar{x}_n = 2,89$.

1) (a) $\left.\begin{array}{l} \mu = \lambda \\ \sigma^2 = \lambda . \end{array}\right\}$ car $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

(b) $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$. donc $\hat{\lambda}_n = \bar{X}_n$

(c) $E(\hat{\lambda}_n) = E(\bar{X}_n) = E(X) = \lambda$.

$\hat{\lambda}_n$ estimateur sans biais de λ

(d) $V(\hat{\lambda}_n) = V(\bar{X}_n) = \dfrac{V(X)}{n} = \dfrac{\lambda}{n}$

(e) $E\left[(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2\right] = V(\hat{\lambda}_n) = \dfrac{\lambda}{n}$

(f) $E\left[(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2\right] = \dfrac{\lambda}{n} \longrightarrow 0$ qd $n \to \infty$

donc $\hat{\lambda}_n$ est un estimateur consistant de λ.

(g) $\hat{\lambda}_n = 2,89$.

2) (a) $P_0 = P(X=0) = e^{-\lambda}$.

$P_1 = P(X=1) = e^{-\lambda} \times \lambda$

(b) $\hat{P}_0 = e^{-\hat{\lambda}_n}$

$\hat{P}_1 = \hat{\lambda}_n e^{-\hat{\lambda}_n}$

(c) On ne peut rien dire sur le biais.

Comme $\hat{\lambda}_n$ est un estimateur consistant de λ, $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$ sont des estimateurs consistants de P_0 et P_1.

(d) $\hat{P}_0 = e^{-2,89} = 0,05$

$\hat{P}_1 = 2,89\, e^{-2,89} = 0,16$.

(e) Estimateur de $P(X=0) = \frac{1}{n}$ (nb de jours où il y a eu 0 appel) $= \frac{N_0}{n}$

Estimateur de $P(X=1) = \frac{1}{n}$ (nb de jours où il y a eu 1 appel) $= \frac{N_1}{n}$

(f) $N_0 \sim \mathcal{B}(n, P_0)$

$$E\left(\frac{N_0}{n}\right) = \frac{1}{n} E(N_0) = \frac{1}{n} n P_0$$
$$= P_0.$$

estimateur sans biais.

$$V\left(\frac{N_0}{n}\right) = E\left[\left(\frac{N_0}{n} - P_0\right)^2\right] = \frac{n P_0(1-P_0)}{n^2} = \frac{P_0(1-P_0)}{n}$$

$\frac{N_0}{n}$ estimateur consistant de P_0.

idem pour $\frac{N_1}{n}$ et P_1.

Ex 3 X_i rang d'apparition du 1er pile lors de la série i de lancers

$X_1 \dots X_n$ iid $X_i \sim \mathcal{G}(p)$.

1) On estime $E(X_1)$ par $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$\overline{X}_n$ estimateur sans biais.

$V(\overline{X}_n) = \frac{V(X_1)}{n} \longrightarrow 0$. $\left(V(X_1) = \frac{1-p}{p^2} \right)$

donc $\overline{X}_n$ estimateur consistant de $E(X_1)$.

2) $E(X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X=k)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} k\, p (1-p)^{k-1}$

$= p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1}$

$= p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$.

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

$\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$.

$\sum_{k=0}^{\infty} k (1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2}$

$$\boxed{E(G) = \frac{1}{p}}$$

3) $p = \frac{1}{E(G)}$.

$\overline{X}_n$ estimateur consistant de $E(G)$

donc $\hat{p}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$.

$\hat{p}_n$ est un estimateur consistant de p.

Biais ?

4) Une estimation de p est $\frac{1}{\overline{x}_n} = 0{,}086$

Ex 4 X_i durée de vie d'une ampoule i.

$i = 1, \dots, n$. $n = 30$

$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

1) $E(G) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \, dx$

$u' = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad u = - e^{-\lambda x}$

$v = x$ $\quad v' = 1$.

$E(G) = \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$

2) Un estimateur de $E(X_1)$ est $\overline{X}_n$.

Un estimateur de λ est $\dfrac{1}{\overline{X}_n}$.

une estimation de λ est $\dfrac{1}{\overline{x}_n} = \dfrac{1}{1{,}55}$

$= 0{,}64$.

3) $$P(X>2) = \int_2^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-\lambda x}\right]_2^{\infty} = e^{-2\lambda}.$$

$\widehat{P(X>2)} = e^{-2\hat\lambda}$ | $\widehat{P(X>2)}_{obs} = e^{-2\times 0{,}644} = 0{,}2\cancel{7}6$

$P(X>6) = e^{-6\lambda}$. | $\widehat{P(X>6)}_{obs}$

$\widehat{P(X>6)} = e^{-6\hat\lambda}$ | $= e^{-6\times 0{,}644} = 0{,}021$

Ex 5 $\quad X_1 \dots X_n$ iid $\mathcal{N}(1,\sigma^2)$

$$\left(\begin{aligned} \hat\sigma_n^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2+1-2X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 + 1 - 2\overline{X}_n \end{aligned}\right)$$

$$E(\hat\sigma_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[(X_i-1)^2\right] = V(X_i) = \sigma^2.$$

Ex 6.

X nb de kilomètres parcourus par un joueur non dopé.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

1) $\hat{\mu}_n = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\hat{\sigma}^2_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2$.

```
fifa <- c(2.14, 1.98, ....., 7.20)
```

$\begin{cases} \text{mean(fifa)} \\ \hat{\mu}_{n,obs} = 4{,}5337 \end{cases}$

$\hat{\sigma}^2_{n,obs} = 2{,}057523 \leftarrow$ `sum( (fifa-mean(fifa))^2)/100`

`var(fifa)` $= 2{,}078306 \rightarrow$ calcule $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_n)^2$.

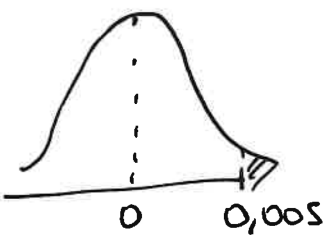
2) $P(X \geq x) \leq 0{,}005$.

$P(X \geq x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{x-\mu}{\sigma} \right)$

$= P\left(Z \geq \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \leq 0{,}005$.

$P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma} \right) \geq 0{,}995$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = 2{,}58$



$x = 2{,}58 \times \sigma + \mu$.

3) $\hat{x} = 2,58 \times \hat{\sigma}_n + \hat{\mu}_n$

$$\hat{x}_{obs} = 2,58 \times \hat{\sigma}_{n,obs} + \hat{\mu}_{n,obs}$$

$$= 8,234$$

4) non.

Ex 7

$X_1 \dots X_n$ iid $\quad f(x,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$\int_\theta^\infty e^{-(x-\theta)} dx = \left[-e^{-(x-\theta)}\right]_\theta^\infty$$

$$= 1.$$

1) $E(X_1) = \displaystyle\int_\theta^\infty x e^{-(x-\theta)} dx$

$u = x \qquad v' = e^{-(x-\theta)}$

$u' = 1 \qquad v = -e^{-(x-\theta)}$

$$E(X_1) = \left[-x e^{-(x-\theta)}\right]_\theta^\infty + \underbrace{\int_\theta^\infty e^{-(x-\theta)} dx}_{\left[-e^{-(x-\theta)}\right]_\theta^\infty}$$

$$= \theta + 1.$$

D'où $E(\bar{X}_n) = \theta + 1$.

$\bar{X}_n$ est un estimateur biaisé de θ

2) $E(\bar{X}_n) = \theta + 1 \qquad \bar{X}_n$ est un estimateur sans biais de $\theta + 1$

3) $\bar{X}_n - 1$ est un estimateur sans biais de θ.

$$E(\bar{X}_n - 1) = E(\bar{X}_n) - 1$$
$$= \theta + 1 - 1 = \theta .$$