Université d'Evry-Val d'Essonne 2019-2020
L2 Mathématiques / DL2 Mathématiques Economie
L2 Informatique / DL2 Biologie Informatique
Statistiques

Feuille de TD 3 : Estimation ponctuelle

Exercice 1
Lors d'un sondage effectué en Ile de France, auprès de 550 personnes, il est apparu que 42 avaient de l'asthme. On se propose d'estimer la probabilité p d'avoir de l'asthme en Ile de France. On note Z_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème personne de l'échantillon sondé est atteinte et 0 sinon. On admet que les variables $Z_1, \cdots, Z_n$ sont indépendantes et de même loi.

1. Enoncer la loi des Grands Nombres appliquée à $Z_1, \cdots, Z_n$.
2. Proposer un estimateur de p noté $\hat{p}_n$.
3. $\hat{p}_n$ est-il un estimateur sans biais de p ? Calculer le risque quadratique de $\hat{p}_n$ pour estimer p.

Exercice 2
On suppose que le nombre X de clients téléphonant à un central téléphonique chaque jour est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda > 0$. Pendant $n = 100$ jours, on a compté le nombre x_i de clients ayant appelé le jour i. Sur ces 100 jours, le nombre moyen d'appels par jour obtenu est de 2,89. On considère que chaque x_i est la réalisation d'une variable aléatoire X_i de loi de Poisson de paramètre λ, les X_i étant supposées indépendantes et identiquement distribuées.

1. Estimation de λ
   (a) Notons $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$. Donner l'expression de μ et σ^2 en fonction de λ.
   (b) Proposer un estimateur de μ noté $\widehat{\mu}_n$. En déduire un estimateur de λ noté $\widehat{\lambda}_n$.
   (c) Calculer le biais de $\widehat{\lambda}_n$.
   (d) Calculer la variance de $\widehat{\lambda}_n$.
   (e) En déduire l'erreur quadratique moyenne de $\widehat{\lambda}_n$.
   (f) Conclure sur la consistance de $\widehat{\lambda}_n$.
   (g) Application numérique : donner une estimation de λ.
2. Estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$

(a) Donner $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P}(X = 0)$ et $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(X = 1)$ en fonction de λ.

(b) Déduire des questions précédentes un estimateur de $\mathbb{P}_0$ et un estimateur de $\mathbb{P}_1$ notés respectivement $\widehat{\mathbb{P}_{0,n}}$ et $\widehat{\mathbb{P}_{1,n}}$.

(c) Application numérique : donner une estimation de $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$.

(d) Proposer un autre estimateur de $\mathbb{P}(X = 0)$ et de $\mathbb{P}(X = 1)$. Etudier les propriétés de ces deux estimateurs.

Exercice 3

Soit une pièce de monnaie dont la probabilié d'apparition de pile est $p \in]0, 1[$, avec p inconnu. On lance la pièce jusqu'à l'apparition de pile. On renouvelle cette expérience $n = 30$ fois et on obtient le tableau suivant qui donne les rangs où pile apparait pour la première fois :

2	4	1	14	3	31	1	23	8	12
12	37	13	1	7	51	4	10	5	18
1	6	21	4	9	17	2	10	12	11

On modélise les rangs d'apparition de pile par des v.a. $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.

1. Quelle est la loi des v.a. $X_1, \ldots, X_n$?
2. Donner un estimateur de $\mathbb{E}(X_1)$ ainsi que ses propriétés.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ en fonction de p.
4. Déduire des deux questions précédentes un estimateur de p. Que pouvez-vous dire des propriétés de cet estimateur ?
5. En déduire une estimation du paramètre inconnu p à travers l'échantillon observé.

Exercice 4

On considère les durées de vie (en année) d'ampoules de même type d'une usine de fabrication d'ampoules. Voici les durées de vie observées pour 30 ampoules.

0.5	1.8	0	0.8	2.2	2.0	2.8	2.3	4.2	0.1
1.6	2.2	2.6	0.4	1.6	0.5	0.5	1.8	0.48	3.3
2.1	0.7	5.4	0.5	0.8	0.9	0.7	1.7	1.3	0.8

On suppose que la durée de vie d'une ampoule est une v.a. X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda, \lambda > 0$: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}.$$

On suppose également que les durées de vie des différentes ampoules sont indépendantes.

1. Déterminer $\mathbb{E}(X_1)$.
2. En déduire un estimateur puis une estimation de λ.
3. On achète une ampoule de ce type. Estimer la probabilité pour qu'elle dure : au moins 2 ans ? au moins 6 ans ?

Exercice 5
On suppose que sur une seconde période d'un match de foot, le nombre X de kilomètres parcourus par un joueur non dopé suit une loi gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2. La FIFA veut mettre en place un système pour détecter des dopeurs sans être amené à faire passer un test à tous les joueurs (ce qui reviendrait trop cher). Pour cela, elle suit d'abord cent joueurs non dopés pour qui elle a relevé le nombre de kilomètres parcourus sur une seconde période d'un match. Les distances parcourues sont données dans le tableau 1.

2.14	1.98	5.56	4.42	5.04	2.25	3.95	4.14	4.29	4.02
4.34	3.63	3.67	3.53	5.98	3.98	1.88	6.19	4.17	5.03
3.81	3.07	4.63	2.83	7.28	4.35	5.42	4.33	4.50	4.06
6.11	4.51	5.74	2.79	7.49	5.41	5.47	6.21	1.40	7.03
4.24	2.78	4.68	2.48	4.92	4.42	3.97	5.34	6.86	6.42
1.85	5.81	3.90	7.49	7.86	4.55	4.69	6.76	4.90	4.21
3.30	2.60	3.42	6.67	5.03	4.09	5.80	5.87	5.26	4.06
4.24	5.55	3.33	4.76	5.11	4.55	2.13	5.87	2.86	3.30
5.09	4.07	6.75	3.26	5.05	3.29	6.69	2.87	3.22	3.67
3.86	3.80	4.86	6.31	6.03	2.82	3.92	3.00	5.05	7.20

TABLE 1 – Echantillon de taille $n = 100$ des distances parcourues.

Supposons que la FIFA décide de faire passer un "test pour dopage" à tout joueur dont le nombre de kilomètres parcourus lors de la seconde partie est invraisemblablement élevé à ses yeux, c'est-à-dire, à tout joueur ayant parcouru, lors de la seconde partie, un nombre de kilomètres supérieur à x avec x tel que $\mathbb{P}(X \geq x) \leq 0.005$.

1. On suppose que μ et σ sont inconnus. Proposer un estimateur de (μ, σ^2) puis déduire une estimation de μ et de σ.
2. Calculer, en fonction de μ et σ, la distance minimale parcourue x à partir de laquelle on doit faire passer un "test pour dopage" à un joueur.
3. En déduire une estimation de x.
4. Un joueur a parcouru 6.7 km lors de la seconde partie. Doit-on lui faire passer un "test pour dopage" ?