Université d'Evry-Val d'Essonne 2019-2020
L2 Mathématiques / DL2 Mathématiques Economie
L2 Informatique / DL2 Biologie Informatique
Statistiques

Feuille de TD 4 : Estimation par intervalle de confiance

Exercice 1
Pour déterminer la teneur en potassium d'une solution, on effectue des dosages à l'aide d'une technique expérimentale donnée.
On admet que le résultat d'un dosage est une variable aléatoire suivant une loi gaussienne $N(\mu, \sigma^2)$ dont l'espérance μ est la valeur que l'on cherche à déterminer, et dont l'écart-type σ est de 1 mg/litre si l'on suppose que le protocole expérimental a été suivi scrupuleusement.
Les résultats pour cinq dosages indépendants réalisés en suivant rigoureusement le protocole expérimental sont les suivants (en mg/litre) : 74.0, 71.6, 73.4, 74.3, 72.2.

1. Déterminer à partir de ces mesures un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance 95% et calculer l'intervalle observé.
2. Quelle taille d'échantillon est nécessaire pour avoir au même niveau de confiance un intervalle de longueur inférieure à 0.1 mg/litre ?

Exercice 2
Suite de l'exercice 1 du TD 3.
Lors d'un sondage effectué en Ile de France, auprès de 550 personnes, il est apparu que 42 avaient de l'asthme. On se propose d'estimer par intervalle de confiance la probabilité p d'avoir de l'asthme en Ile de France. On note Z_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la i-ème personne de l'échantillon sondé est atteinte et 0 sinon. On admet que les variables $Z_1, \cdots, Z_n$ sont indépendantes et de même loi. On note $\overline{Z}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$. Calculer des intervalles de confiance pour p, basés sur l'approximation gaussienne, de coefficients de sécurité asymptotiques 90%, 95% puis 99%. Calculer les intervalles observés.

Exercice 3
En conduite, on sait que le temps de réaction (t.r.) est aléatoire et est lié à l'état du conducteur. On suppose que pour un conducteur dans un état normal (non atteint de maladie pouvant modifier son t.r., sous l'emprise d'aucun produit de type alcool, drogue, médicaments, ...), le temps de réaction mesuré en secondes est une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$. On considère un test de conduite où on met le conducteur en situation de danger imprévisible et on observe son temps de réaction. On fait passer le test à $n = 307$ conducteurs choisis aléatoirement et dans un état normal et le temps de réaction moyen pour l'échantillon choisi est $\bar{x}_n = 1.05\, s$.

1. On suppose tout d'abord que X est une v.a. de loi gaussienne de variance $\sigma^2 = 0.2$: $X \sim \mathcal{N}(\mu, 0, 2)$.
   (a) Donner un intervalle de confiance pour le t.r. moyen μ, de niveau de confiance 95% et calculer l'intervalle observé.
   (b) Je conduis par beau temps sur une autoroute à $130\,km/h$. La distance parcourue pendant le temps de réaction est appelée distance de réaction. Donner un intervalle de confiance (et l'intervalle observé) pour la distance de réaction moyenne, de niveau de confiance 95%.
2. On ne suppose plus à présent que X suit une loi gaussienne et que σ^2 est connu.
   (a) Comment peut-on estimer σ^2 ? Quelle sont les propriétés de cet estimateur ?
   (b) On a estimé σ^2 à partir de l'échantillon considéré et on trouve comme estimation $\hat{\sigma}^2_{n,obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 = 0.23$. Peut-on calculer des intervalles de confiance comme dans la question 1 ? Si oui, faites le.
   (c) Peut-on affirmer que les niveaux de confiance sont exactement de 95% ?

Exercice 4
Suite de l'exercice 2 du TD 3.
On suppose que le nombre X de clients téléphonant à un central téléphonique chaque jour est une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ, avec $\lambda > 0$. Pendant $n = 100$ jours, on a compté le nombre x_i de clients ayant appelé le jour i. Sur ces 100 jours, le nombre moyen d'appels par jour obtenu est de 2,89. On considère que chaque x_i est la réalisation d'une variable aléatoire X_i de loi de Poisson de paramètre λ, les X_i étant supposées indépendantes et identiquement distribuées.

1. Déterminer un intervalle de confiance pour λ de niveau de confiance approximatif $1 - \alpha$.
2. Donner les intervalles de confiance observés pour λ calculés aux niveaux de confiance approximatifs 90%, 95% et 99%. Commenter.
3. Comment peut-on obtenir des intervalles de confiance de longueurs plus petites en gardant les mêmes niveaux de confiance ?

Exercice 5
Pour déterminer la concentration en glucose d'un échantillon sanguin, on effectue des dosages à l'aide d'une technique expérimentale donnée. On considère que le résultat de chaque dosage est une variable aléatoire de loi gaussienne. On effectue 10 dosages indépendants, qui donnent les résultats suivants (en g/l) :

$$0.96, 1.04, 1.08, 0.92, 1.04, 1.18, 0.99, 0.99, 1.25, 1.08$$

1. Calculer une estimation de la concentration en glucose de cet échantillon sanguin.
2. Calculer un intervalle de confiance de cette concentration de niveau de confiance 95%.